数学コラム(11)

平方数の約数

西山豊

トランプを使ったパズルやゲームは限りなくあるが，次に紹介するトリックは鮮やかである．トランプから一種類，たとえばスペードだけのカードを選び出し，エースからキングまでを裏向けにして左から右に並べる．まず，1 の倍数のカードを左から順に表に向ける．1 の倍数は 13 枚のすべてである．

A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K

つぎに 2 の倍数のカード（2, 4, 6, …）を裏向ける．

A, *, 3, *, 5, *, 7, *, 9, *, J, *, K

つぎに 3 の倍数のカード（3, 6, 9, …）を裏向ける.すでに裏向いているカードがあれば(6 と Q)，それを表にする．つまり，カードの向きを反転させるということだ.

A, *, *, *, 5, 6, 7, *, *, *, J, Q, K

このようにして，4 の倍数のカードの向きを反転させ, 5 の倍数のカードの向きを反転させ, …, 13 の倍数のカードの向きを反転させると, 最終的にはつぎのようになる.

A, *, *, 4, *, *, *, *, 9, *, *, *, *

このカードの並びを見て，何か気づかないだろうか. エース，4，9 といった平方数のカードだけが表を向き，それ以外はすべて裏向いている．これは偶然であろうか.

トリックに使ったのは 13 枚のカードであったので, 偶然そうなったのかも知れない. 今度は 100 枚のカードを使い，1 から 100 までの数字を記入したカードをホワイト・ボードの棚に今と同じように裏向けて並べる. そして 1 の倍数, 2 の倍数, 3 の倍数のカードを反転させ，…，100 の倍数のカードを反転させると，最終的には，平方数のカードだけが表を向き（1，4，…，81，100)，それ以外のカードは裏を向いている.

ここまでくると，その理由を考えてみたくなるのは当然だ．実は，このトリックは数に関する重要な定理を証明していることになっている.

「平方数の約数は奇数個ある」

整数 N の約数を，1 とそれ自身 N を含めるとする．約数をすべて求めてみると，約数どうしが対になることが多い. たとえば 12 の約数は, 1，2，3，4，6，12 の 6 個あるが,

$$1\times 12 = 2\times 6 = 3\times 4 = 12$$

のように，1 と 12，2 と 6，3 と 4 が対になっている．それで，数の約数の個数は，ほとんどが偶数である．ところが対にならない約数がある．それは平方数の場合の約数である．16 の約数は，1，2，4，8，16 の 5 個あるが,

$$1\times 16 = 2\times 8 = 16 \text{ と } 4\times 4 = 16$$

のように，1 と 16，2 と 8 は対になっているが，4 は対にならない(同じ数を掛けるのが平方数たる所以である)．それで，平方数の場合だけが，約数の個数が奇数となる.

さて，13 枚のカードで 1 の倍数，2 の倍数，3 の倍数，…のカードを反転させたが，これは，その数の約数であるときに反転させたことになる．たとえば 8 のカードは，1，2，4，8 の倍数のとき，つまり 8 の約数 1，2，4，8 のとき反転させたことになる．反転の回数が偶数であれば，最初の状態に戻り（裏)，奇数であれば表になる.

以上の話は，マーチン・ガードナーの「数学ゲーム」(『サイエンティフィック・アメリカン』1974 年 11 月号) に紹介されたものである. このような話題を数学の授業に取り入れるなら，数学嫌いの生徒が減るのではないだろうか.

(にしやまゆたか／大阪経済大学)